Übersicht über Lösungsverfahren

1. Ordnung:

<table>
<tr><td rowspan="2">seperable Dgl.

$x'(t) = f_1(x) \cdot f_2(t)$
Substitution folgender in seperable Dgl. :
$x' = f(at + bx + c)$
$x' = f\left(x/t\right)$
Lösungsverfahren: Trennung der Variablen (T.d.V.)</td><td colspan="2">lineare Dgl.

$\dot{f}_1(t)\dot{x}(t) + f_0(t)x(t) = g(t)$</td><td rowspan="2">Andere Lösungsver.:
numerisch
Laplace-Transfo.</td></tr>
<tr><td>homogen

g(t) = 0
T.d.V.</td><td>inhomogen

g(t) ≠ 0
Wir lösen das homogene Problem (T.d.V.)
a) V.d.K.
b) Festlegung einer speziellen Lös. Des inhomogenen Problems
$y_{in\hom}(t) = x_{\hom}(t) + x_p(t)$</td></tr>
</table>

2. Ordnung: (und n-ter)

$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = g(t)$ (linear mit konst. Koeffizienten)

I. klassisch:
   1) Wir bestimmen die allgemeine Lösung $x_{hom}(t)$ des homogenen Problems
   2) Wir bestimmen eine spezielle Lös. $x_p(t)$ des inhom. Porblems
   $\Rightarrow x_{inhom}(t) = x_{hom}(t) + x_p(t)$

II. Laplace-Transformation

III. numerische Verfahren

Seperable (Trennbare) Dgl. 1. Ordnung:

Eine Dgl. 1. Ordnung in y(x) heißt seperabel, falls Sie die Gestalt $y'(x) = f_1(x) \cdot f_2(y(x))$ besitzt. Alle linearen homogenen Dgl. 1. Ordnung sind trennbar! Lineare inhomogene Dgl. 1. Ordung sind in der Regel nicht trennbar.

T.d.V. (allgemeines Prizip):

1) Darstellung der Dgl. In der Form $y'(x) = f_1(x) \cdot f_2(y(x))$ (1)
2) Wir stellen die Gleichung so um, dass af der LS nur noch y, auf der RS nur x vorkommt!

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y'(x) = f_1(x) \cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \qquad (2)$$

3) Integieren von (2): $\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)dx$ (3)
4) Lösen des Integrals (3):$H(y) = F_1(x) + C,\ C \in \Re$ (4)
5) H(y) = Stammfunktion von $\frac{1}{f_2(y)}$; $F_1(x)$ = Stammfunktion von $f_1(x)$
6) Auflösen von (4) nach y.

V.d.K. bei inhomogener, linearer Dgl. 1. Ordnung:

$f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$

1) lösen des homogen Problems mit T.d.V. $\Rightarrow y_{\hom}(x) = K \cdot e^{-F_{01}(x)}, K \in R$, wobei F01(x) die Stammfunktion von $\frac{f_0(x)}{f_1(x)}$ ist

2) Ansatz $y_{in\hom}(x) = K(x) \cdot e^{-F_{01}(x)}$ in Dgl. einsetzten $\Rightarrow K(x) = \int \frac{g(x)}{f_1(x)} e^{F_{01}(x)} dx$

$\Rightarrow$ allg. Lösung der Dgl. $y_{\hom}(x) = K(x) \cdot e^{-F_{01}(x)}$

Dgl. 2. Ordnung, linear, mit konstanten Koeffizienten:

$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \qquad (1)$

1) Die allg. Lös. $y_{\hom}(x)$ der homogenen Dgl. $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ bildet einen VR der Dimension 2, d.h. sie hat die Gestalt: $y_{\hom}(x) = c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x)$; $c_1, c_2 \in R$ ($b_1(x), b_2(x)$ ist Basis, linearunabhängig)
2) Die allg. Lös. $y_{in\hom}(x)$ von (1) ist ein affiner Raum der Dimension 2, d.h. sie hat die Gestalt: $y_{in\hom}(x) = y_p(x) + y_{\hom}(x)$ ($y_p(x)$ = eine spezielle Lös. von (1))

Lösungsmethode:

1) Wir bestimmen $y_{\hom}(x)$: Dazu bestimmen wir eine Basis, d.h. zwei linear unabhängige Lösungen.
   Dazu $y(x) = b(x) = e^{\lambda x}$ homogene Dgl. einsetzen, $e^{\lambda x}$ ausklammern
   $\Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, anschließend λ bestimmen:
   1. Fall: 2 verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow$ Basis $b_1(x) = e^{\lambda_1 x}, b_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
   2. Fall: 1 doppelte reelle Lösung $\lambda \Rightarrow$ Basis $b_1(x) = e^{\lambda x}, b_2(x) = xe^{\lambda x}$
   3. Fall: 1 konjugiert komplexe Lösung $\lambda_1 = \alpha + j\phi, \lambda_2 = \alpha - j\phi \Rightarrow$ Basis $b_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\phi x), b_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\phi x)$

   $\Rightarrow y_{\hom}(x) = c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x)$; $c_1, c_2 \in R$
2) Wir bestimmen eine spezielle Lösung $y_p(x)$ von (1) des inhomogenen Problems.
   1. Ansatz anhand der Gestalt (Typs) von f(x)
   2. Ansatz hängt von Parametern ab. Diese werden bestimmt, indem man den Ansatz in die Dgl. Einsetzt und Koeffizienten vergleich durchführt.

Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Type $y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$ in Abhängigkeit vom Type der Störfunktion g(x):

Störfunktion $g(x)$	**Lösungsansatz** $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade n $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) \text{ für } & a \neq 0, b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$ $Q_n(x)$: Polynom vom Grade n *Parameter*: Koeffizienten des Polynoms $Q_n(x)$
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) C ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ *Parameter*: A
	(2) C ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung:

	$y_p = Ax \cdot e^{cx}$ *Parameter*: A
	(3) C ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ *Parameter*: A
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination (Überlagerung) aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$	(1) $j\beta$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ *Parameter*: A, B bzw. C, φ
	(2) $j\beta$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ oder $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ *Parameter*: A, B bzw. C, φ
4. $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ (P_n ist dabei eine Polynomfunktion vom Grade n)	(1) $c + j\beta$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung. $y_p = e^{cx}[Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)]$ $Q_n(x), R_n(x)$: Polynome vom Grade N *Parameter*: Koeffizienten der Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$
	(2) $c + j\beta$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung. $y_p = x \cdot e^{cx}[Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)]$ $Q_n(x), R_n(x)$: Polynome vom Grade N *Parameter*: Koeffizienten der Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$

Die Fourier-Reihe:

Bem.: Ist f(x) gerade [f(x) = f(-x)] $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall \ n \geq 1$, z. B cos(x) (Achsensymetrisch)
Ist f(x) ungerade [f(x) = -f(-x)] $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall \ n \geq 1$, z. B sin(x) (Punktsymetrisch)
$\frac{a_0}{2}$ ist die Achse um die f(x) periodisch schwankt.

Sei y(t) eine periodische Funktion mit Periode T $\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, dann hat die FR folgende gestalt:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \text{ mit}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

Fourier-Reihe von f(t) (Periode T) in <u>komplexer Schreibweise</u>:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \forall n \in Z \text{ mit } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Es gilt: $a_n = 2\cdot \mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = -2\cdot \mathrm{Im}(c_n)$, $\frac{a_0}{2} = c_0$

Das <u>Fourier-Integral</u> für nichtperiodische Funktionen:

Sei f(t) eine beliebige nichtperiodische stetige Funktion. Dann gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \text{ wobei } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$F(\omega)$ (Spektralfunktion) ist komplex. Schreibweise: $F(\omega) = |F(\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

$|F(\omega)|$ = Amplitudenspektrum, $\varphi(\omega)$ = Phasenspektrum

Taylor-Reihe:

Sei f(x) n+1 mal differenzierbar in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0. Dann gilt $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$:

$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu (x-x_0)^\nu + R_n^{x_0}(x)$, wobei $b_\nu = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$ und das Rstglied $R_n^{x_0}(x)$ wie folgt dargestellt werden kann:

- $R_n^{x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \mu(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; $(0 < \mu < 1)$ $\Rightarrow$ Restglied von Lagrange
- $R_n^{x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \mu(x-x_0))}{n!}(1-\mu)^n(x-x_0)^{n+1}$; $(0 < \mu < 1)$ $\Rightarrow$ Restglied von Canchy

Laplace-Trafo.:

Urbildfunktion an der Stelle t $\to \infty$ und t $\to$ 0:

a) Falls $\lim_{t\to 0} f(t)$ existiert gilt: $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to\infty} s\cdot F(s)$

b) Falls $\lim_{t\to \infty} f(t)$ existiert gilt: $f(\infty) = \lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{t\to 0} s\cdot F(s)$