Zahlenfolgen:

alternierend: $a_{n+1} = - a_n$ n n_0

nach oben beschränkt: k R: a_n k n n_0

nach unten beschränkt: k R: a_n k n n_0

(streng) monoton wachsend: ($a_n < a_{n+1}$) a_n a_{n+1} n n_0

(streng) monoton fallend: ($a_n > a_{n+1}$) a_n a_{n+1} n n_0

Häufungspunkt: $U_\varepsilon(b) = \{x$ R| |x-b| }

Grenzwert: $\lim_n a_n = b$

Nullfolge: $\lim_n a_n = 0$

Grenzwertsätze:

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten lim a_n = a und lim b_n = b:

1) $\lim_n (a_n \quad b_n) = (\lim_n a_n) \quad (\lim_n b_n) = a \quad b$

2) $\lim_n (a_n \quad b_n) = (\lim_n a_n) \quad (\lim_n b_n) = a \quad b$

3) $\lim_n (C \quad a_n) = C \quad \lim_n a_n = C \quad a$

4) $a_n = C$ n: $\lim_n a_n = C$

5) $\lim_n (a_n / b_n) = (\lim_n a_n) / (\lim_n b_n)$, falls b 0

6) $\lim_n ((a_n)^k) = (\lim_n a_n)^k$

7) $\lim_n {}^k\overline{a_n} = {}^k\overline{\lim_n a_n}$

Besondere GW:

1) Sei q > 1 dann gitl: $\lim_n {}^n\overline{q} = 1$

2) $\lim_n {}^n\overline{n} = 1$

3) Sei |q| < 1 dann gitl: lim $q^n = 0$

4) $\lim_n (1 + 1/n)^n = e$

5) $\lim_n {}^{n+c}\overline{q} = 1$ falls q > 0

Koordinatentransformationen:

Ursprung verschieben:

Sei (0,x,y) und (P_0,u,v) zwei Koordinatensysteme wobei der Ursprung P_0 des neuen KS im alten die Koordinaten P_0 = (a,b) besitzt. Dann gilt:

y = f(x) v + b = f(u + a) v = f(u +a) - b

Drehen:

Sei P = (x,y) ein Punkt im (0,x,y)-KS Die Koordinaten (u,v) dieses Punktes im um den Winkel (entgegen dem Uhrzeigersinn) gedrehten (u,v)-KS erhält man wie folgt:

u = ysin + xcos

v = ycos - xsin

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \begin{matrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

GWS für Funktionen:

Unter der Voraussetzung, daß die GW $\lim_{x \quad x_0} f(x)$ und $\lim_{x \quad x_0} g(x)$ existieren, gelten folgende Regeln:

1) $\lim_{x \quad x_0} (c \quad f(x)) = c \quad \lim_{x \quad x_0} f(x)$

2) $\lim_{x \quad x_0} (f(x) \quad g(x)) = \lim_{x \quad x_0} f(x) \quad \lim_{x \quad x_0} g(x)$

3) $\lim_{x \quad x_0} (f(x) / g(x)) = \lim_{x \quad x_0} f(x) / \lim_{x \quad x_0} g(x)$ falls $\lim_{x \quad x_0} g(x)$ 0

4) $\lim_x x = 0$

5) $\lim_x x =$

6) $\lim_x 1/x = 0$

7) $\lim_{x \quad x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$ 0 falls $\lim_{x \quad x_0} g(x) =$, $\lim_{x \quad x_0} f(x) = f_0$, $|f_0| <$, f_0 0
falls $\lim_{x \quad x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \quad x_0} f(x) = f_0$, $|f_0| <$, f_0 0

8) $\lim_{x \quad x_0} f(x)/g(x) =$, falls $\lim_{x \quad x_0} g(x) = g_0$ 0, $|g_0| <$, $\lim_{x \quad x_0} f(x) =$

9) $\lim_{x \quad x_0} {}^k\overline{f(x)} = {}^k\overline{\lim_{x \quad x_0} f(x)}$

10) $\lim_{x \quad x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \quad x_0} f(x)}$

11) $\lim_{x \quad x_0} [f(x)]^k = [\lim_{x \quad x_0} f(x)]^k$

Anwendungen der Integralrechnung:

Flächeninhalt: A $=_a^b$ f(x) - g(x)}dx

Rotationskörper: $V_x =_a^b (f(x))^2$ dx; $V_y =_a^b (f^{-1}(x))^2$ dx

Bogenlänge: s $=_a^b$ $\overline{(f'(x))^2}$dx

Mantelfläche: $M_x =_a^b 2$ f(x) $\overline{(f'(x))^2}$dx

linearer Mittelwert: $\overline{y}_{linear} = \frac{1}{b-a} {}_a^b f(x)dx$

quatratischer Mittelwert: $y_{quatratisch} = \overline{\frac{1}{b-a} {}_a^b f^2(x)dx}$

Allgemeine Eigenschaften von Funktionen:

Symmetrie:

Eine Funktion f:x D R y W R heißt:

- gerade (achsensymmetrisch), falls gilt:
f(x) = f(-x) x D (Spiegelung an der x-Achse)
- ungerade (punktsymmetrisch), falls gilt:
-f(x) = f(-x) x D (Spiegelung an Ursprung)

Monotonie:

Sei f:x D R y W R. Dann heißt f (streng) monoton wachsend in A D, falls: x_1, x_2 A: x1 (<) x2 $f(x_1)$ (<) $f(x_2)$; (streng) monoton fallend in A D, falls: x_1, x_2 A: x1 (<) x2 $f(x_1)$ (>) $f(x_2)$

Periodizität:

f:D R W R, y = f(x), heißt Periodisch mit der Periode p, falls gilt: f(x) = f(x + k p), k Z, x D

Beschränktheit:

Sei f:D R W R. Dann heißt f auf A D nach oben beschränkt, falls gilt: K_O: x A: f(x) K_O, nach unten beschränkt, falls gilt: K_U: x A: f(x) K_U, beschränkt, falls gilt: K: x A: |f(x)| K

Injektiv/Surjektiv/Bijektiv:

Die Abb: f heißt *eindeutig*, falls gilt:
y_1 y_2 x_1 x_2

Die Abb. f heißt *surjektiv*, falls jedes Element y W Bild eines Elements x D ist.
(y W x D: y = f(x))

Die Abb. f heißt *injektiv*, falls gilt:
x_1 x_2 $f(x_1)$ $f(x_2)$

Eine Abb. f mit folgenden Eigenschaften:

1) eindeutig (d. h. f ist Funktion)
2) surjektiv (auf W)
3) injektiv

heißt *bijektiv* (bzw. eineindeutig)

Partialbruchzerlegung:

geg: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ echtgebrochenes Polynom

1) Zerlegen von Q(x) in LF, d. h. Bestimmung aller Nullstellen von Q(x)

2) Partialbruch:
$$\frac{x-1}{(x-5)^2(x^2+1)} \quad \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2+2)}$$

3) Bestimmung der Konstanten:
$$\frac{x-1}{(x-5)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2+2)}$$

mit Hauptnenner multiplizieren, 4 Werte für x ein setzten (sinnvollerweise Nullstellen)

Integration durch Partialbruchzulegung:

Integrale der Form f(x)dx, wobei f(x) ein echt gebrochenes Polynom ist.

1) Zerlegung in PB
2) Integration der PB

$\frac{A}{(x-x_i)}$ A ln|x-x_i| $\frac{B}{(x-x_i)^k}$ $-\frac{B}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}}$

Bei komplexen PB: Anwendung des gesamten Könnens

Algebraische Funktionen (Abbildungen, Kegelschnitte)

Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (x_0,y_0):
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Ellipse mit den Halbachsen a(x) und b(y) und dem Mittelpunkt (x_0,y_0):
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Hyperbel mit Asymptotenschnittpunkt (x_0,y_0):
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Parabel mit Scheitelpunkt (x_0,y_0):
$(y-y_0) + 2p(x-x_0) = 0$

Differentialrechnung:

Ableitung einer Funktion:

Tangentengleichung: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$\lim_{x \quad 0} \frac{f(x+ \quad x) - f(x)}{x} =: f'(x)$

Ableitung elementarer Funktionen:

1) $y = x^n \qquad y' = nx^{n-1}$
2) $y(x) = a^x \qquad y'(x) = a^x \; \ln(a)$
3) $[\sin(x)]' = \cos(x)$
4) $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Regeln zur Berechnung von Ableitungen zusammengesetzter Funktionen:

1) $(f \quad g)'(x) = f'(x) \quad g'(x)$ (Summenregel)
2) $(\quad f(x))' = \quad f'(x)$ (Faktoren, die nicht von x abhängen, kann man rausziehen)
3) $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ (Produktregel)
4) $\frac{f(x)}{g(x)} \; ' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Quotientenregel)
5) $[f(u(x))]' = \frac{df}{du} \; \frac{du}{dx}$ (Kettenregel)

Logarithmische Differentiation:

Vor.: $y(x) = f(x)^{g(x)}$, Ges.: $y'(x)$

Lösungsmethode:

1) Gleichung logarithmieren:

$\ln(f(x)) = \ln(f(x)^{g(x)}) = g(x)\, \ln(f(x))$

2) Gleichung nach x ableiten:

LS nach Kettenregel: $[\ln(y(x))]' = \frac{1}{y(x)} \; y'(x)$

RS nach Produnktregel:

$[g(x)\, \ln(f(x))]' = g'(x)\, \ln(f(x)) + g(x) \; \frac{f'(x)}{f(x)}$

3) nach y'(x) umstellen:

$y'(x) = y(x)\; [g'(x)\, \ln(f(x)) + g(x) \; \frac{f'(x)}{f(x)}\;]$

Ableitung von Umkehrfunktionen:

$y = f(x) \qquad x = g(y) = f^{\,1}$ und $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x = g(y)} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}\Big|_{x = g(y)}$

Implizite Differentiation:

Gegeben sei eine Funktion in impliziter Form: $F(x,y) = 0$

Lösung: 1) Man leite beide Seiten der Gleichung $f(x, y(x)) = 0$ nach x ab. 2) Man stellt die so erhaltene Gleichung nach y'(x) um.

Andere Möglichkeit:

$$y'(x) = \frac{-\frac{F(x,y)}{x}}{\frac{F(x,y)}{y}} = - \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung:

$x := x(p);\; y := y(p)$

$\frac{dx}{dp}(p) = \dot{x}(p) \qquad \frac{dy}{dp}(p) = \dot{y}(p) \qquad \frac{dy}{dx}(x) = y'(p)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} \qquad y'(x) = \frac{\dot{y}(p)}{\dot{x}(p)}$

Berechnung von Grenzwerten - Die Regeln von Bernoulli und L' Hospital:

Grenzwerte vom Type: $\frac{"0"}{"0"}$ und $\frac{" \;"}{" \;"}$: $\lim_{x \quad x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \quad x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Grenzwerte von Type "0" " " umformen in $\frac{"0"}{"0"}$ oder $\frac{" \;"}{" \;"}$

Grenzwerte vom Type " "-" " umformen:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\, g(x)}} = \frac{f(x)\, g(x)}{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}$$

Grenzwerte vom Type "1^∞": $\lim_{x \quad x_0} (f(x)^{g(x)}) = e^{\lim g(x) \cdot \ln(f(x))}$

Integration durch "Partielle Integration"

Bei Integralen der Form $f(x)g(x)dx$, wobei für f(x) die Stammfunktion und für g(x) die Ableitung bekannt ist: $_a^b\, f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - {}_a^b\, f(x)g'(x)dx$

Kurvendiskussion:

Monotonie:

1) f ist auf (a,b) (streng) monoton wachsend $\quad f'(x)\; (>) \quad 0$
2) f ist auf (a,b) (streng) monoton fallend $\quad f'(x)\; (<) \quad 0$

Extremwerte:

(notwendige Bedingung) Wenn f in x_0 einen lokalen Extremwert besitzt, so gilt $f'(x_0) = 0$;

(hinreichende Bedingung) Wenn 1) $f'(x_0) = 0$ und 2) $f''(x_0) \quad 0$, so ist x_0 ein Lokaler Extremwert. Wenn $f''(x_0) > 0$, so ist x0 ein lokales Minimum, wenn $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum.

Wende- und Sattelpunkte:

a) Wenn $f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) \quad 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt.

b) Wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \quad 0$, so ist x_0 ein Sattelpunkt.

Krümmungsverhalten:

Sei f: (a,b) R auf (a,b) 2 mal differenzierbar. Dann gilt für jede Teilmenge A (a,b): f ist auf A konvex f'(x) monoton wachsend x A f''(x) > 0 x A; f ist auf A konkav f'(x) monoton fallend x A f''(x) > 0 x A

Integration durch Substitution:

1) Finden einer geeigneten Substitution $u = g(x) \qquad x = g^{-1}(u) =: h(u)$
2) $x = h(x)$ und $\frac{du}{dx} = g'(x)$ bzw. $dx = \frac{du}{g'(x)}$ werden in das Integral eingesetzt.
3) Berechnen des Integrals
4) Substitution rückgängig machen

Regeln:

1) $f(ax +b)dx \qquad$ Sub. $u := ax + b$
2) $f(x)\, f'(x)dx \qquad$ Sub. $u := f(x)$
3) $\frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \qquad$ Sub. $u := f(x)$
4) $f(x, \sqrt{a^2-x^2})dx \qquad x = a \sin(u)$
$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$
5) $f(x, \sqrt{a^2+x^2})dx \qquad x = a \sinh(u)$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$
6) $f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx \qquad x = a \cosh(u)$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$

Reihen:

Spezielle Reihen: $(s_n)_{n\geq 1} = {}_{=1} \frac{1}{\;}$ harmonische Reihe: divergent

$(s_n)_{n\geq 1} = {}_{=1}\, aq^{v-1}$ geometrische Reihe: konvergent für $|q| < 1$

Wert geom. Reihe: $s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

Konvergenz:

1) Ausrechnen von s_n und $\lim s_n$ berechnen!
2) $(s_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, falls (s_n) monoton und beschränkt ist.
3) *(notwendiges Kriterium für Konvergenz)*
$(s_n) = ({}_{=1}^{n}\, a_v)_{n\geq 1}$ ist konvergent $\quad (a_v)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge ($\lim a_v = 0$)
4) *(hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Reihe)*
a) Quotientenkriterium von D'Alambert: Sei $q = \lim_n | \frac{a_{n+1}}{a_n} |$
Es gilt: $(s_n) = {}_{=1}\, a_v$ ist konvergent (divergent), falls $q < 1$ ($q > 1$). Für $q = 1$ gibt es keine Aussage.
b) Wurzelkriterium von Caucluy: Sei $q = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$
Es gilt: $(s_n) = {}_{=1}\, a_v$ ist konvergent (divergent), falls $q < 1$ ($q > 1$). Für $q = 1$ gibt es keine Aussage.
c) Leibnitzkriterium für alternierende Reihen:
Eine alternierende Reihe ist konvergent, falls: 1) (a_v ist monoton fallend und 2) $\lim a_v$
d) Kriterium der konvergenten Majorante bzw. divergenten Minorante:
Seien (a_n), (b_n) zwei Zahlenfolgen mit $a_n > 0$, $b_n > 0 \quad n$.
Dann gilt: Wenn ${}_{=1}\, a_v$ konvergent (divergent) und stets $a_v \quad b_v \quad a_v \quad b_v$, so ist ${}_{=1}\, b_v$ konvergent (divergent).
e) Spezialfall zu d): Satz über absolute Konvergenz:
Wenn ${}_{=1}\, a_v$ konvergent, so ist auch ${}_{=1}\, a_v$ konvergent.

Potenzreihen:

Ermittlung des Konvergenzbereichs:

Sei $P_{x0}(x) = {}_{=0}\, b_v\, (x-x_0)^v$ Dann gilt: $P_{x0}(x)$ konvergiert [divergiert] für alle x, für die gilt $|x-x_0| < r$ [$|x-x_0| > r$] mit $r = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$

(r = Konvergenzradius)